**Министерство образования Республики Беларусь**

**Белорусский государственный университет**

Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №1

По курсу «Численные методы»

**Решение нелинейных уравнений**

Вариант №8

Работу выполнил:

студент 3 курса 7 группы

**Шатерник Артём**

Преподаватель:

**Будник А. М**.

**Минск 2024**

1. **Постановка задачи.**

Требуется найти корень нелинейного уравнения:

Применяя следующие методы:

* Простой итерации
* Метод Ньютона
* Метод Чебышева

Проверить условия теоремы о сходимости метода Ньютона.

1. **Алгоритм решения.**
2. Отделение корня.

Требуется найти отрезок, на котором функция будет менять знак

Посмотрим на значения функции в точках:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4.0855 | -1.6109 | -1.2817 | 0 | 0.3678 | -0.8646 | -3.9502 |

Если на концах отрезка меняется знак, то на этом отрезке есть корень.

Отсюда видно, что:

* [-3, -2] – есть корень,
* 0 – является корнем,
* [1, 2] – есть корень.

Будем искать корень на отрезке [-3, -2].

Воспользуемся методом деления отрезка пополам с целью получить лучшее начальное приближение и отделить корень.

Найдём середину отрезка:

Смотрим значение функции в этой точке:

Знак отличается на концах отрезка [-3, -2.5], так что теперь берём его.

Тогда начальное приближение возьмём равным:

1. Проверим выполнение условий теоремы о сходимости метода Ньютона.

Находим :

Строим интервал :

Значения на границах :

,

.

Находим M:

Проверяем условие:

Условия теоремы выполняются, а значит метод Ньютона будет сходиться.

1. Формулы методов.

Все методы являются итерационными. Критерием остановки итерационного процесса является условие:

где

* Метод простой итерации.

Для применения метода требуется привести уравнение к каноническому виду:

Метод простой итерации будет иметь вид:

* Метод Ньютона.

где производная функции имеет вид:

* Метод Чебышева.

где вторая производная имеет вид:

1. **Листинг программы.**

**# Функция и её производные**

**def func(x):  
 return math.e\*\*(-x) - (x - 1)\*\*2  
  
def func\_der(x):  
 return -math.e \*\* (-x) -2 \* x + 2  
  
def func\_second\_der(x):  
 return math.e \*\* (-x) – 2**

**# Канонический вид**

**def func\_canon(x):**

**return - math.log( (x - 1)\*\*2 )**

**e = 10\*\*(-7)**

**x0 = -2.75**

**# Метод простой итерации**

**def simple\_iteration\_method(x0, f, e):**

**n = 0**

**x\_new = x0**

**while True:**

**n += 1**

**x\_old = x\_new**

**x\_new = f(x\_new)**

**if abs(x\_old - x\_new) <= e:**

**break**

**return [x\_new, n]**

**result, i = newton\_method(x0, func, func\_der, e)**

**print(f"Значение x:{result} \nЧисло итераций: {i}")**

**residual = func(result)**

**print(format(residual, '.4e'))**

**# Метод Ньютона**

**def newton\_method(x0, f, f\_der, e):**

**n = 0**

**x\_new = x0**

**while True:**

**n += 1**

**x\_old = x\_new**

**x\_new = x\_new - f(x\_new) / f\_der(x\_new)**

**if abs(x\_old - x\_new) <= e:**

**break**

**return [round(x\_new, 16), n]**

**result, i = newton\_method(x0, func, func\_der, e)**

**print(f"Значение x:{result} \nЧисло итераций: {i}")**

**residual = func(result)**

**print(format(residual, '.4e'))**

**# Метод Чебышева**

**def chebyshev\_method(x0, f, f\_der, f\_second\_der, e):**

**n = 0**

**x\_new = x0**

**while True:**

**n += 1**

**x\_old = x\_new**

**f\_res = f(x\_new)**

**f\_der\_res = f\_der(x\_new)**

**x\_new = x\_new - f\_res / f\_der\_res - f\_res \*\* 2 \* f\_second\_der(x\_new) / (2 \* f\_der\_res \*\* 3)**

**if abs(x\_old - x\_new) <= e:**

**break**

**return [x\_new, n]**

**result, i = chebyshev\_method(x0, func, func\_der, func\_second\_der, e)**

**print(f"Значение x:{result} \nЧисло итераций: {i}")**

**residual = func(result)**

**print(format(residual, '.4e'))**

1. **Результат и его анализ.**

Невязка рассчитывается путём подстановки полученных значений в функцию

* Метод простой итерации.

Значение x: -2.51286251320096

Число итераций: 26

Невязка: 5.0992e-07

* Метод Ньютона.

Значение x: -2.51286241725234

Число итераций: 5

Невязка: 0.0000e+00

Такая невязка означает, что точность превысила 16 знаков.

* Метод Чебышева.

Значение x: -2.51286241725234

Число итераций: 4

Невязка: 0.0000e+00

Скорость сходимости.

Теоретически:

Метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем равным коэффициенту сжатия *.*

Метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

Метод Чебышева имеет кубическую скорость сходимости.

На практике получаем что число итераций у методов соответствует теоретическим скоростям их сходимости:

.

Точность.

Метод простой итерации дал значение в пределах заданной точности.

Два других метода превысили точность в 16 знаков, что связанно с их быстрой скоростью сходимости. Если воспользоваться дополнительной библиотекой Decimals, то можно посчитать реальные значения невязок.

Тогда получим для метода Ньютона невязку: 3.3380e-22.

Для метода Чебышева: -1.0000e-26.

Экономичность методов.

Метод простой итерации является самым экономичным. При каждой его итерации требуется вычислить всего одно значение функции:

Метод Ньютона при каждой итерации требует подсчёт двух значений функций: и .

Метод Чебышева требует подсчёта уже трёх значений функций:,,.

Видно, что за увеличение скорости сходимости приходится платить увеличением числа операций.